Übungsklausur Integralrechnung – Wassergraben
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme eine Stammfunktion der Funktion f.

   a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 11$ b) $f(x) = \frac{2x^3 - 6x}{x^5}$

2) G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + 1$.

   Auf dem Schaubild von G befindet sich der Punkt P(2/10).
   Bestimme einen Funktionsterm von G.

3) Berechne das Integral und vereinfache soweit wie möglich: $\int_1^3 (\frac{1}{x^2} - 5)dx$

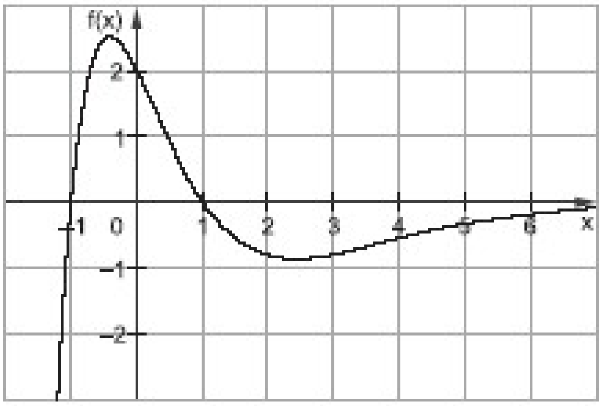
4) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$.
   Das Schaubild von f hat einen Wendepunkt.
   Bestimme eine Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

5) Geben Sie eine Funktion f an, für die gilt: $\int_0^4 f(x)dx = 2$.

6) Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.

   F ist eine Stammfunktion von f.
   Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe.

   a) Das Schaubild von F hat an der Stelle $x = -1$ einen Tiefpunkt.
   b) Das Schaubild von F hat an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt.
   c) $F(0) < F(1)$
   d) $\int_0^6 f(x)dx < 0$



Übungsklausur Integralrechnung – Wassergraben
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Der Querschnitt eines Wassergrabens wird dargestellt durch das Schaubild der Funktion $f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}6x^2$ mit $-4 \leq x \leq 2$. (Einheit 1 m)

a) (1) Zeichne den Querschnitt des Wassergrabens im angegebenen Bereich.
   (2) Bestimme mit Hilfe der Zeichnung, wie tief der Wassergraben ist.

b) (1) Berechne die Querschnittsfläche des Wassergrabens.
   (2) Der 200m lange Wassergraben füllt sich während eines Gewitterregens. Wie viel m^3 befinden sich in dem Graben, wenn er vollständig gefüllt ist?

c) Die Zuflussrate während des Gewitterregens wird modellhaft beschrieben durch die Funktion $n(t) = 0{,}36t^3 - 10{,}2t^2 + 59{,}84t + 60$
(t = Zeit in Minuten seit Einsetzen des Regens, n(t) in m^3 pro Minute)

   (1) Zeichne das Schaubild der Zuflussrate im Bereich $0 \leq t \leq 10$.
   (2) Wie viel Kubikmeter sind 8 Minuten nach Einsetzen des Regens im Graben, wenn beim Regenbeginn bereits $351 m^3$ im Graben vorhanden waren und man davon ausgeht, dass kein Wasser im Boden versickert?

d) Ein Käfer befindet sich im Punkt O(0|0).
Er möchte aus dem (ausgetrockneten) Graben hinauskrabbeln und schafft höchstens einen Anstieg von 1,5.
Kann er aus dem Graben zum linken Ufer krabbeln?

Übungsklausur Integralrechnung – Wassergraben

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 11x$

b) $f(x) = \frac{2x^3 - 6x}{x^5} = \frac{2x^3}{x^5} - \frac{6x}{x^5} = 2x^{-2} - 6x^{-4} \quad \Rightarrow F(x) = -2x^{-1} + 2x^{-3}$

2) $G(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c \qquad$ und $G(2) = 10 \;\Rightarrow c = 8$

$G(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 8$

3) $\int_1^3 (\frac{1}{x^2} - 5)dx = \int_1^3 (x^{-2} - 5)dx = \left[-\frac{1}{x} - 5x\right]_1^3 = -\frac{1}{3} - 15 - (-1-5) = -\frac{1}{3} - 9 = -\frac{28}{3}$

4) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1, \quad f'(x) = -3x^2 + 6x + 1 \quad f''(x) = -6x + 6$

setze $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = 2 \quad \Rightarrow W(1|2)$

$f'(1) = 4 = m_t \qquad \Rightarrow t: y = 4x - 2$

5) z.B. $f(x) = 0{,}5$

6) a) wahr, da $f(-1) = 0$ mit VZW von – nach +

b) falsch, Schaubild von f hat bei $x = 4$ kein lokales Extremum.

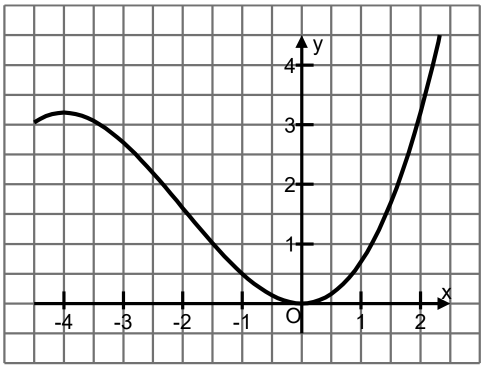
c) wahr, für $0 \le x \le 1$ ist $f(x) \ge 0$, F steigt monoton.

d) wahr, die Fläche, die vom Schaubild von f mit der x-Achse in diesem Intervall begrenzt wird liegt teilweise oberhalb, teilweise unterhalb der x-Achse. Die Fläche, die oberhalb liegt ist kleiner als die Fläche unterhalb der x-Achse.

Übungsklausur Integralrechnung – Wassergraben

Lösungen Wahlteil:

a) (1)



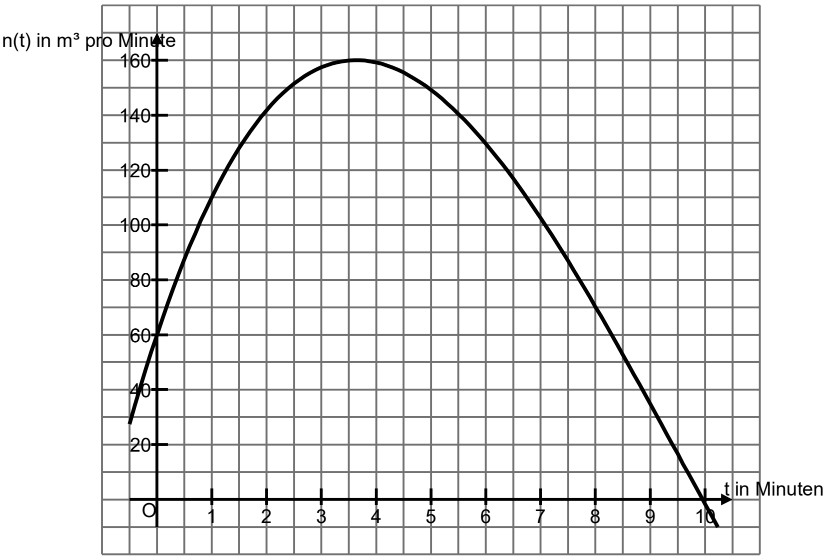
(2) $f(-4) = f(2) = 3{,}2$ und $f(0) = 0 \Rightarrow$ Tiefe 3,2m

b) (1) $A = \int_{-4}^{2} (3{,}2 - f(x))dx = \left[3{,}2x - \frac{0{,}1}{4}x^4 - \frac{0{,}6}{3}x^3\right]_{-4}^{2} =$

$\left(3{,}2 \cdot 2 - \frac{0{,}1}{4} \cdot 2^4 - \frac{0{,}6}{3} \cdot 2^3\right) - \left(3{,}2 \cdot (-4) - \frac{0{,}1}{4} \cdot (-4)^4 - \frac{0{,}6}{3} \cdot (-4)^3\right) = 10{,}8 \Rightarrow 10{,}8m^2$

(2) $V = 10{,}8m^2 \cdot 200m = 2160m^3$

c) (1)



(2) $V_{8\,min} = 351 + \int_0^8 n(t)dt$

$\int_0^8 n(t)dt = \int_0^8 0{,}36t^3 - 10{,}2t^2 + 59{,}84t + 60dt = \left[\frac{0{,}36}{4}t^4 - \frac{10{,}2}{3}t^3 + \frac{59{,}84}{2}t^2 + 60t\right]_0^8 =$

$= \left(\frac{0{,}36}{4} \cdot 8^4 - \frac{10{,}2}{3} \cdot 8^3 + \frac{59{,}84}{2} \cdot 8^2 + 60 \cdot 8\right) - (0) = 1022{,}72$

$V_{8\,min} = 351 + 1022{,}72 = 1373{,}72m^3$

d) Steigung maximal im WP (-2|1,6)

$|f'(-2)| = 1{,}2 < 1{,}5$ für $-4 \le t \le 0 \Rightarrow$ Der Käfer kommt zur linken Seite heraus.